Engenharia de Manutenção (EF 302000)

Prof. Dr. Marcelo Sucena, PhD
marcelosucena@gmail.com
http://www.marcelosucena.com.br

DISTRIBUIÇÃO DE WEIBULL

O físico Ernest Hjalmar Wallodi Weibull nasceu no dia 18 de junho de 1887 na Suécia. Ele publicou vários trabalhos na área de engenharia dos materiais, inclusive estudos sobre resistência de materiais, fadiga e ruptura em sólidos, e propriedades de esferas e de rolos.

A distribuição de probabilidade que leva seu nome foi estudada a partir de seu artigo *A Statistical Distribution Function of Wide Applicability*, publicada no *Journal of Applied Mechanics*, em 1951, baseando-se nos estudos sobre a resistência de aços.

Aplica-se na Análise da Confiabilidade pois permite:

- ✓ Representar falhas típicas de partida (mortalidade infantil);
- ✓ Falhas aleatórias;
- ✓ Falhas devido ao desgaste;

Vida útil do componente

- ✓ Obter parâmetros significativos da configuração das falhas;
- ✓ Representação gráfica simples.

A probabilidade de falhar um componente é dada por:

$$F(t) = 1 - e^{-(\frac{t - t_0}{\eta})^{\beta}}$$

Considerando que $t \geq t_0$ e $\beta > 0$.

A confiabilidade de um componente é dada por:

$$R(t) = e^{-(\frac{t - t_0}{\eta})^{\beta}}$$

A taxa de falhas instantânea é expressa por:

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta}(\frac{t - t_0}{\eta})^{\beta - 1}$$

Mas, qual é o significado dos parâmetros $\mathbf{t_0}$, **β** e **η** da Distribuição de Weibull?

Significado dos parâmetros $\mathbf{t_0}$, **β** e **η** da Distribuição de Weibull.

$\mathbf{t_0}$ - Vida Mínima ou Confiabilidade Intrínseca - tempo de operação o qual o equipamento passa a apresentar falhas.

Em muitos casos típicos de desgaste, transcorre um intervalo de tempo (t_0) significativo até que ocorram as primeiras falhas.

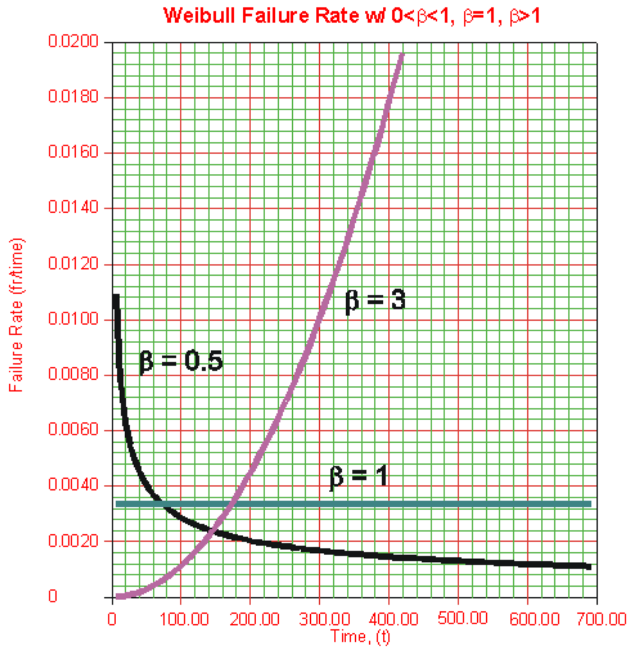
η - Vida Característica ou Parâmetro de Escala

Intervalo de tempo entre t_0 e t no qual ocorrem 63,2% das falhas, restando portanto, 36,8% de itens sem falhar.

Quando $t - t_0 = \eta$, $R(t) = e^{-1} = 0{,}368 = 36{,}8\%$.

β - Fator de Forma (indica a forma da curva e a característica das falhas).

- **β < 1** - mortalidade infantil.
- **β = 1** - falhas aleatórias.
- **β > 1** - falhas por desgaste.



Fonte: Reliasoft Brasil, Características da Distribuição Weibull, Edição 3, Maio 2005

Análise de Weibull usando o Microsoft Excel

(Roteiro para utilização da regressão linear simples)

1 – Coletar os dados de TPF (**Tempo Para Falhar**) do componente.

2 – Calcular a **amplitude do ROL**:

R = Maior Valor Observado – Menor Valor Observado

3 – Calcular a quantidade de classes (Regra de Sturges):

K = 1 + 3,3 log N,

sendo *N* a quantidade de observações da amostra.

4 – Calcular a amplitude do intervalo da classe: **h = R / K**

5 – Colocar o número de ordem, sequencial, de cada classe, ou seja, de 1 até K, na primeira coluna de uma tabela.

6 – Colocar em duas colunas da planilha os limites inferior e superior de cada intervalo da classe.

7 – Colocar em uma terceira coluna o valor médio de cada intervalo.

8 – Determinar e colocar em uma quarta coluna a frequência das classes (**Fi**). Fi é a quantidade de dados que estão contidos na classe.

9 – Calcular e colocar em uma quinta coluna a frequência acumulada (**Fa**). Fa é a soma de todas as observações inferiores ao limite superior de um dado intervalo de classe.

10 – Calcular e colocar em uma sexta coluna a frequência relativa simples observada (Frso). Frso é a relação entre frequência da classe e a quantidade total de observações: **Frso (%) = Fi / N**.

11 - Calcular e colocar em uma sétima coluna a frequência relativa acumulada observada (Frao). Frao é a relação entre a frequência absoluta e a quantidade total de observações: **Frao (%) = Fa / N**. Neste caso, Frao será denominado F(t).

Obs.: Caso algum F(t) seja igual a 1, deve-se fazer Y = 0, senão acarretará em erro de cálculo de Y = Ln { - Ln [1 – F(t)]}

12 – Na oitava coluna calcular os valores de Y baseando-se em

Ln { - Ln [1 – F(t)]}.

13 – Nas próximas colunas, devem-se calcular tantos valores de X quantos forem os valores estipulados de t_0. Os valores de X são calculados por Ln (t - t_0). Para cada variável independente *X*, com a variável dependente *Y*, deve-se efetuar a regressão linear para determinar os coeficientes de Weibull conforme o que segue:

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t - t_0}{\eta}\right)^{\beta}}$$

$$Ln\{-Ln[1 - F(t)]\} = \beta \cdot Ln(t) - \beta \cdot Ln(\eta)$$

$$Y = a \cdot X + b$$

$$\boxed{\eta = e^{\frac{-b}{\beta}}}$$

Observações

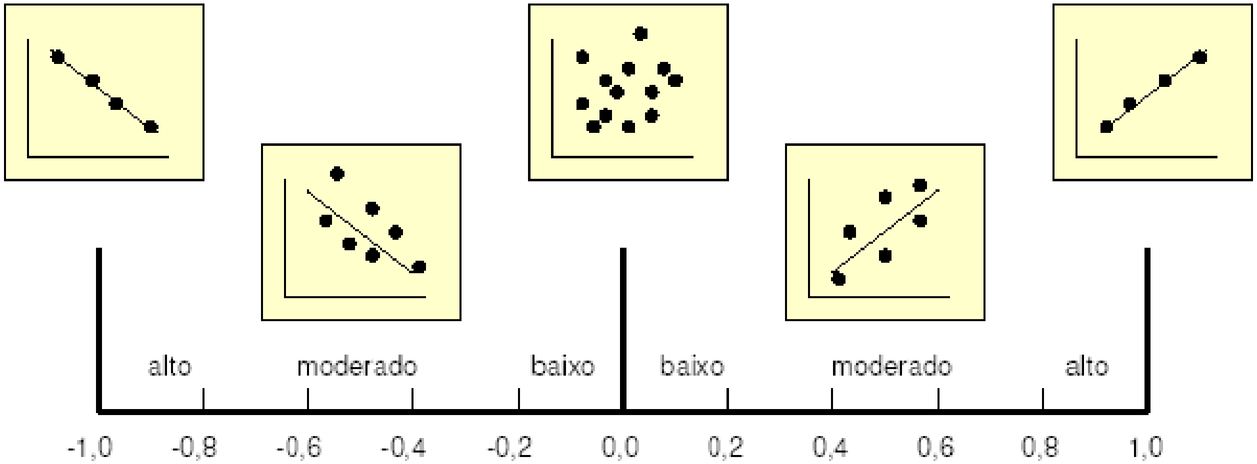
- Os coeficientes da reta de regressão (angular e linear) são:

$$a = \frac{\sum XY - n\overline{X}\,\overline{Y}}{\left(\sum X\right)^2 - n\overline{X}^2} \qquad b = \overline{Y} - a\overline{X}$$

- O <u>maior valor de t_0</u> deve ser menor que o menor TPF, pois Ln $(t - t_0)$ retornaria erro caso $t = t_0$.
- Para cada t_0, e consequentemente, para cada X, devem-se calcular os Coeficientes de Correlação de Pearson (r) de cada regressão. O <u>**maior r**</u> será aquele que fornecerá os parâmetros **β** e **η** da distribuição de Weibull.

- O Coeficiente de Correlação de Pearson (r) varia de -1 a 1 e é calculado por:

$$r = \frac{n\Sigma XY - \Sigma X\, \Sigma Y}{\sqrt{[n\Sigma X^{2} - (\Sigma X)^{2}][n\Sigma Y^{2} - (\Sigma Y)^{2}]}}$$



Exemplo – Baseando-se na tabela a seguir que apresenta os resultados de medidas de tempos para falhar (TPF) de um truque, em dias, calcule os parâmetros da distribuição de Weibull.

48	86	30	39	29	9	23	23	39	6
37	80	50	60	10	72	7	47	29	38
31	24	17	50	64	11	22	6	21	49
48	40	29	15	43	18	34	25	52	18
34	77	31	76	45	37	29	38	32	6

Até o item 11

Maior Valor	86
Menor Valor	6
Amplitude do ROL (R)	80
Quant. de Observações	50
Quant.de Classes (K)	6,61
Amplit.do Interv.da Classe (h)	12,11
K considerado	7
h considerado	12

	Ordem	Classes				Valor Médio (t)	Fi	Fa	Frso	F(t) = Frao
	1	≥	6	<	18	12	9	9	0,18	0,18
	2		18		30	24	12	21	0,24	0,42
	3		30		42	36	13	34	0,26	0,68
	4		42		54	48	9	43	0,18	0,86
	5		54		66	60	2	45	0,04	0,9
	6		66		78	72	3	48	0,06	0,96
Obs.	7		78		90	84	2	50	0,04	1

Freq.das Classes

Freq.Acumulada

Freq.Relativa Simples

Freq.Relativa Simples Acum.

Freq.Relativa Acum. Observ.

$t_0(1)$	0
$t_0(2)$	1
$t_0(3)$	2
$t_0(4)$	3
$t_0(5)$	4
$t_0(6)$	5

Até parte do item 13

Y é função de F(t)

	Y	Valores de X					
		$\ln(t-t_0 1)$	$\ln(t-t_0 2)$	$\ln(t-t_0 3)$	$\ln(t-t_0 4)$	$\ln(t-t_0 5)$	$\ln(t-t_0 6)$
	-1,617	2,485	2,398	2,303	2,197	2,079	1,946
	-0,607	3,178	3,135	3,091	3,045	2,996	2,944
	0,131	3,584	3,555	3,526	3,497	3,466	3,434
	0,676	3,871	3,850	3,829	3,807	3,784	3,761
	0,834	4,094	4,078	4,060	4,043	4,025	4,007
	1,169	4,277	4,263	4,248	4,234	4,220	4,205
Obs.	0,000	4,431	4,419	4,407	4,394	4,382	4,369
Σ	0,585	25,920	25,698	25,464	25,217	24,952	24,667

Até parte do item 13

Dados para o Cálculo da Regressão												
Y^2	X_1^2	X_2^2	X_3^2	X_4^2	X_5^2	X_6^2	X_1Y	X_2Y	X_3Y	X_4Y	X_5Y	X_6Y
2,615	6,175	5,750	5,302	4,828	4,324	3,787	-4,019	-3,878	-3,724	-3,553	-3,363	-3,147
0,369	10,100	9,831	9,555	9,269	8,974	8,670	-1,931	-1,905	-1,878	-1,849	-1,820	-1,789
0,017	12,842	12,640	12,435	12,226	12,011	11,792	0,468	0,464	0,460	0,456	0,452	0,448
0,457	14,986	14,824	14,658	14,491	14,320	14,147	2,617	2,603	2,588	2,574	2,558	2,543
0,696	16,764	16,626	16,487	16,346	16,203	16,059	3,415	3,401	3,387	3,372	3,357	3,342
1,367	18,290	18,170	18,050	17,928	17,804	17,679	5,000	4,983	4,967	4,950	4,933	4,915
0,000	19,632	19,526	19,419	19,311	19,202	19,092	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
5,521	98,788	97,368	95,906	94,398	92,840	91,225	5,550	5,668	5,800	5,949	6,118	6,313

Σ

Resultados das Regressões				
	β (a - coef. angular)	**b (coef.linear)**	**η (dias)**	**r**
X_1	1,203	-4,369	37,837	0,862
X_2	1,163	-4,186	36,572	0,865
X_3	1,122	-3,997	35,278	0,868
X_4	1,079	-3,805	33,952	0,870
X_5	1,034	-3,605	32,584	0,873
X_6	0,988	-3,399	31,165	0,876

β < 1 - mortalidade infantil.

η - Intervalo de tempo entre t_0 e t no qual ocorrem 63,2% das falhas.

Obrigado!

LABFER - Laboratório para Ensino e Pesquisa de Engenharia Ferroviária no Estado do Rio de Janeiro

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA
Praça General Tibúrcio, 80 - Praia Vermelha. CEP: 22.290-270 Rio de Janeiro – RJ. Telefone: (21) 3820-4199. www.ime.eb.br

EXÉRCITO BRASILEIRO
IME
INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA
(REAL ACADEMIA DE ARTILHARIA, FORTIFICAÇÃO E DESENHO - 1792)